数学

数と式（問題冊子p.20～p.24）

1

(1) $(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2$

$=\boldsymbol{x^2+6x+9}$

(2) $(x+1)(x+2)=x^2+(1+2)x+1\cdot 2$

$=\boldsymbol{x^2+3x+2}$

(3) $x^2-8x+15=x^2+\{(-3)+(-5)\}x+(-3)\cdot(-5)$

$=\boldsymbol{(x-3)(x-5)}$

(4) $|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0\text{のとき}) \\ -a & (a<0\text{のとき}) \end{cases}$ より

$|-3|-|-5|+|7|$

$=3-5+7=\mathbf{5}$

(5) $\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{3-\sqrt{3}}{9-3}$

$=\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}}$

(6) $x-6\geqq-\dfrac{2}{3}x+4$

両辺に3を掛けて

$3x-18\geqq-2x+12$

$5x\geqq 30$

よって

$\boldsymbol{x\geqq 6}$

(7) $x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0$

よって

$\boldsymbol{x=-3}$ （重解）

(8) $x^2=11$ より $x=\pm\sqrt{11}$

「$x=\sqrt{11}$」⇒「$x^2=11$」のみが成り立つので，「$x^2=11$」は「$x=\sqrt{11}$」であるための必要条件であるが十分条件でない。（②）

2

(1) $(2x+1)(3x-4)=2\cdot 3x^2+\{2\cdot(-4)+1\cdot 3\}x+1\cdot(-4)$

$=\boldsymbol{6x^2-5x-4}$

(2) $(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=\boldsymbol{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$

(3) $9a^2-25b^2=(3a)^2-(5b)^2$

$=\boldsymbol{(3a+5b)(3a-5b)}$

(4) $4a^2+8ab-21b^2=4a^2+8b\cdot a-21b^2$

$=\boldsymbol{(2a+7b)(2a-3b)}$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 7b & \rightarrow\ 14b \\ 2 & -3b & \rightarrow\ -6b \\ \hline 4 & -21b^2 & 8b \end{array}$$

(5) $2<\sqrt{5}$ より　$2-\sqrt{5}<0$

$3>\sqrt{5}$ より　$3-\sqrt{5}>0$

よって

$|2-\sqrt{5}|+|3-\sqrt{5}|$

$=-(2-\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})$

$=\mathbf{1}$

(6) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{(3+\sqrt{2})^2}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{3^2+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{3^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{11+6\sqrt{2}}{9-2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{11+6\sqrt{2}}{7}}$

(7) $-\dfrac{3x-1}{2}>\dfrac{2}{3}x-7$

両辺を6倍して

$-3(3x-1)>4x-42$

$-9x+3>4x-42$

$-13x>-45$

よって，$\boldsymbol{x<\dfrac{45}{13}}$

(8) $|x-4| \geqq 5$ より

$x-4 \leqq -5$，$5 \leqq x-4$

よって

$\boldsymbol{x \leqq -1}$，$\boldsymbol{9 \leqq x}$

2次関数（問題冊子p.25 ~ p.28）

1

(1)　$y=2x^2+4x-3$ は,

$$y=2(x^2+2x)-3$$
$$=2(x+1)^2-2-3$$
$$=2(x+1)^2-5$$

と変形できるから，このグラフの頂点は,

点 **$(-1,\ -5)$**

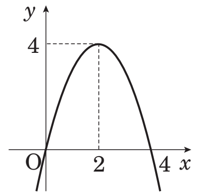
(2)　頂点 $(0,\ 0)$ が点 $(3,\ -4)$ に移動するので,

$$y=2(x-3)^2-4$$
$$= \boldsymbol{2x^2-12x+14}$$

(3)　$y=-x^2+4x$

$$=-(x-2)^2+4$$

より，$x=2$ で最大値**4**をとる。



(4)　$y=3x^2-5x+1$ のグラフと x 軸との共有点の個数は,

$$(-5)^2-4\cdot3\cdot1=13>0$$

より，**2**個

(5)　$y=-2x^2+x-3$ のグラフと x 軸との共有点の個数は,

$$1^2-4\cdot(-2)\cdot(-3)=-23<0$$

より，**0**個

(6)　$x^2-6x-16\leqq 0$

$$(x+2)(x-8)\leqq 0$$

より，**$-2\leqq x\leqq 8$**

(7)　$x^2+x-6>0$

$$(x-2)(x+3)>0$$

より，**$x<-3,\ 2<x$**

2

(1)　$y=ax^2+bx+c$（ただし，$a\neq 0$）とおくと，3点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(-2,\ 15)$ を通るから,

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ c=1 \\ 4a-2b+c=15 \end{cases}$$

これを解いて，$a=2$，$b=-3$，$c=1$

よって，求める2次関数は,

$$y=\boldsymbol{2x^2-3x+1}$$

(2)　$y=ax^2+bx+c$（ただし，$a\neq 0$）とおくと，3点 $(3,\ 0)$，$(0,\ -9)$，$(-1,\ -4)$ を通るから,

$$\begin{cases} 9a+3b+c=0 \\ c=-9 \\ a-b+c=-4 \end{cases}$$

これを解いて，$a=2$，$b=-3$，$c=-9$

よって，求める2次関数は,

$$y=\boldsymbol{2x^2-3x-9}$$

(3)　$y=x^2+2x+2a=(x+1)^2+2a-1$ のグラフは下の図のようになるので，$x=1$ のとき，最大

値$2a+3$をとる。

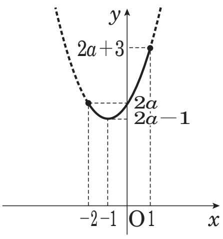
よって，$2a+3=7$

したがって，$a=\mathbf{2}$

このとき，

$y=(x+1)^2+3$

となるので，最小値は**3**



(4)　$y=x^2-6x+a=(x-3)^2+a-9$ のグラフは下の図のようになるので，$x=3$のとき，最小値$a-9$をとる。

よって，$a-9=-3$

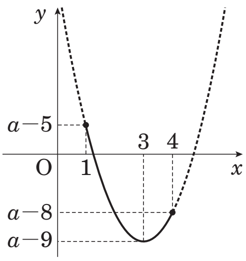
したがって，$a=\mathbf{6}$

このとき，

$y=(x-3)^2-3$

となるので，

最大値は**1**



(5)　$y=x^2-2(a-1)x+4$ のグラフがx軸と接するとき，

$\{-(a-1)\}^2-1\cdot 4=0$

$a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

よって，$a=\mathbf{-1}$，$\mathbf{3}$

図形と計量（問題冊子p.29 ～ p.32）

1

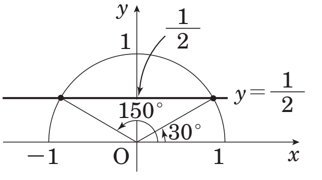
(1)　$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき，

$\sin(90^\circ - \theta) = \mathbf{\cos\theta}$

(2)　$0^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき，

$\sin(180^\circ - \theta) = \mathbf{\sin\theta}$

(3)　下図より，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ の値は**30°**，**150°**



(4)　正弦定理より，$\dfrac{BC}{\sin 45^\circ} = 2\sqrt{6}$

$BC = 2\sqrt{6} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \mathbf{2\sqrt{3}}$

(5)　余弦定理より，

$AC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ$

$= 7$

$AC > 0$ より，$AC = \mathbf{\sqrt{7}}$

(6)　三角形の面積の公式により，

$\dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = \mathbf{10\sqrt{3}}$

2

(1) $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{16}{25}$

$0°<\theta<180°$より，$\sin\theta>0$だから，$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$

よって，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{4}{5}\div\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{4}{3}}$

(2) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-4)^2=17$

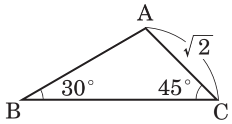
よって，$\cos^2\theta=\dfrac{1}{17}$

$0°<\theta<180°$において，$\tan\theta<0$だから，$\cos\theta<0$

よって，$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{17}}{17}}$

(3) 正弦定理より

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 30°}=\frac{AB}{\sin 45°}$$

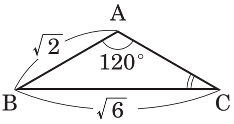


よって，

$$AB=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\div\frac{1}{2}$$
$$=\boldsymbol{2}$$

(4) 正弦定理より，

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin 120°}=\frac{\sqrt{2}}{\sin C}$$



よって，

$$\sin C=\frac{\sqrt{2}\sin 120°}{\sqrt{6}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$$

$\angle A=120°$より，$\angle C<60°$

よって，$\angle C=\boldsymbol{30°}$

(5) 余弦定理より，$\cos A=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 6}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

$0°<\angle A<180°$より，$\sin A>0$だから，

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$$
$$=\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

よって，△ABCの面積は$\dfrac{1}{2}CA\cdot AB\sin A$

$$=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}$$
$$=\boldsymbol{6\sqrt{6}}$$

場合の数・確率（問題冊子p.35〜p.37）

1

(1) 異なるn個のものを1列に並べる方法の総数は$n!$より，6人の生徒を1列に並べる方法は，

$$6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=\mathbf{720}\text{（通り）}$$

(2) 異なるn個のものから，異なるr個を取り出す方法の数は，

$${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

より，求める場合の数は

$${}_6C_3\times{}_3C_2=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{3\cdot2}{2\cdot1}=\mathbf{60}\text{（通り）}$$

(3) 異なるn個のものから，異なるr個を取り出して1列に並べる方法の数は，${}_nP_r$通りより

$${}_6P_3=6\cdot5\cdot4=\mathbf{120}\text{（通り）}$$

(4) すべての目の出方は，

$$6\times6=36\text{（通り）}$$

積が12となるのは，

（大，小）=(2，6)，(3，4)，(4，3)，(6，2)の4通り。

よって，求める確率は，

$$\frac{4}{36}=\mathbf{\frac{1}{9}}$$

(5) すべてのくじの引き方は，${}_5C_2$（通り）

当たり1本，はずれ1本の引き方は${}_2C_1\times{}_3C_1$（通り）

よって，求める確率は，

$$\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\mathbf{\frac{3}{5}}$$

(6) すべてのくじの引き方は，${}_{10}C_3$（通り）

当たりくじ3本の引き方は，${}_3C_3$（通り）

よって，求める確率は，$\dfrac{{}_3C_3}{{}_{10}C_3}=\mathbf{\dfrac{1}{120}}$

2

(1) 男子2人を1人と考えて，男子1人と女子3人を横1列に並べる並べ方は，4!通り。そのそれぞれに対して，男子2人の並べ方は，2!通り。

よって，求める並べ方は，

$$4!\times2!=4\cdot3\cdot2\cdot1\times2\cdot1=\mathbf{48}\text{（通り）}$$

(2) 男子3人の並べ方は${}_3P_3$通り。そのそれぞれに対して女子の並べ方は${}_3P_3$通りある。

また，男女交互に並ぶ方法は，

「男女男女男女」「女男女男女男」

の2通りあるから，求める並べ方は，

$$\begin{aligned}{}_3P_3\times{}_3P_3\times2&=3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1\times2\\&=\mathbf{72}\text{（通り）}\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{6!}{3!2!1!}=\mathbf{60}$（通り）

(4) A地点から交差点Pまでの行き方は，全部で，

$$\frac{5!}{3!2!}=10\text{（通り）}$$

交差点PからB地点までの行き方は，全部で，

$$\frac{4!}{2!2!}=6\text{（通り）}$$

よって，求める方法の数は，

$$10\times6=\mathbf{60}\text{（通り）}$$

(5) 1枚の硬貨を4回投げるとき，表が2回，裏が2回出る確率は，

$${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\mathbf{\frac{3}{8}}$$

(6) 1回の試行で，赤玉が出る確率は，$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

白玉が出る確率は，$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

3回の試行の結果，赤玉が1回だけ出る確率は

$${}_3C_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{27}=\mathbf{\frac{2}{9}}$$

図形の性質（問題冊子p.38～p.40）

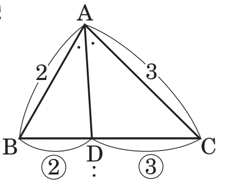
1

⑴　$\angle A$の二等分線と辺BCの交点がDより

　$AB:AC=BD:DC$

が成り立つ。

よって，$BD:DC=\mathbf{2:3}$



⑵　$\angle A$の二等分線と辺BCの交点がDより

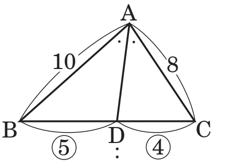
　$AB:AC=BD:DC$

が成り立つ。

よって，$BD:DC=5:4$

　ゆえに，

$$BD=\frac{5}{9}BC=\frac{5}{9}\times 12=\mathbf{\frac{20}{3}}$$



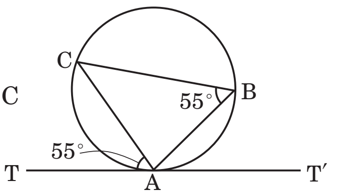
⑶　円の弦と，その端点における接線がつくる角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。

　よって，

　$\angle TAC=\angle ABC$

　ゆえに，

　$\angle ABC=\mathbf{55^\circ}$



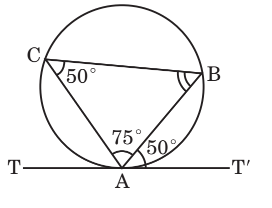
⑷　接線と弦のつくる角の定理により

　$\angle ACB=\angle BAT'=50^\circ$

　よって，$\triangle ABC$において

　$\angle ABC=180^\circ-(50^\circ+75^\circ)$

　　　　$=\mathbf{55^\circ}$



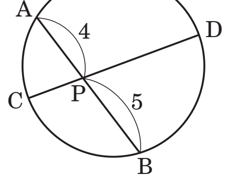
⑸　方べきの定理より，

　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$

　よって，

　$PC\cdot PD=4\times 5$

　　　　$=\mathbf{20}$

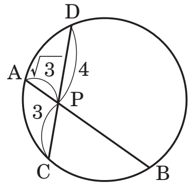


(6)　方べきの定理より

　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

　よって，$\sqrt{3} \times PB = 3 \times 4$

　ゆえに，$PB = \mathbf{4\sqrt{3}}$



2

(1)　接線と弦のつくる角の定理により

　$\angle CBD = \angle DCT' = 50°$

円に内接する四角形の性質により

　$\angle BCD + \angle BAD = 180°$

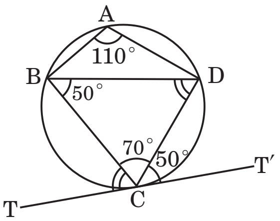
よって，　$\angle BCD = 180° - 110°$

　　　　　　$= 70°$

ゆえに，

　$\angle BDC = 180° - (50° + 70°)$

　　　$= \mathbf{60°}$



(2)　接線と弦のつくる角の定理により

　$\angle BDC = \angle BCT = 70°$

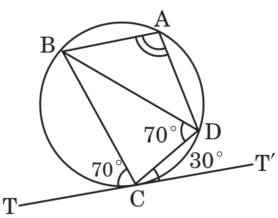
　$\angle BCD = 180° - (70° + 30°) = 80°$

円に内接する四角形の性質により

　$\angle BCD + \angle BAD = 180°$

よって，　$\angle BAD = 180° - 80°$

　　　　　　$= \mathbf{100°}$



(3)　$PC = x$とすると，$PD = x + 4$

方べきの定理より

　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$であるから

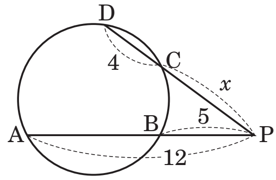
　　$12 \cdot 5 = x \cdot (x + 4)$

　　$x^2 + 4x - 60 = 0$

　　$(x + 10)(x - 6) = 0$

　$x > 0$より，$x = 6$

　よって，$PC = \mathbf{6}$



(4)　$PB = AB = x$とすると，$PA = 2x$

方べきの定理より

　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$であるから

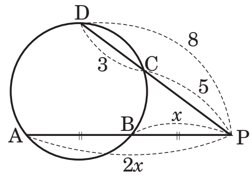
　　$2x \cdot x = 5 \cdot 8$

　　　$2x^2 = 40$

　　　　$x^2 = 20$

　$x > 0$より，$x = 2\sqrt{5}$

　よって，$AB = \mathbf{2\sqrt{5}}$



(5)　POの延長と円の交点をCとし，

　$PB = x$とすると，$PC = x + 6$

方べきの定理より

　$PB \cdot PC = PA^2$であるから

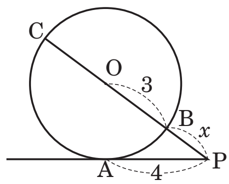
　　$x(x + 6) = 4^2$

　　$x^2 + 6x - 16 = 0$

　　$(x - 2)(x + 8) = 0$

　　$x > 0$より，$x = 2$

　　よって，$PB = \mathbf{2}$



整数の性質 (問題冊子p.41〜p.43)

1

(1)　360を素因数分解すると

$$360 = \mathbf{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}$$

(2)　2640を素因数分解すると

$$2640 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 11^1$$

よって，2640の正の約数の個数は

$$(4+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{40}\ (個)$$

(3)　$-16 = 3 \cdot (-6) + 2$

よって，-16を3で割ったときの商は$\mathbf{-6}$，余りは**2**である。

(4)　17A3が9の倍数であるから，各位の数の和

$$1+7+\mathrm{A}+3 = 11+\mathrm{A}$$

が9の倍数である。よって，Aは**7**である。

(5)　1から10までの自然数のうち，5の倍数は$5=5\times1$と$10=5\times2$の2個。したがって10!を素因数分解したときの5の指数は2。また，10!を素因数分解したときの2の指数は2より大きい。よって，10!は10で**2**回まで割り切れる。

(6)　$x=1$，$y=-1$は方程式$5x+4y=1$の整数解の1つであり

$$5 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = 1$$

両辺に2を掛けると

$$5 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) = 2$$

よって，方程式$5x+4y=2$の整数解の1つは

$x=\mathbf{2}$，$y=\mathbf{-2}$

(7)　$\dfrac{2}{7} = 0.285714285\cdots = 0.\dot{2}8571\dot{4}$

よって，$\dfrac{2}{7}$を小数で表すと285714の6個の数字が循環する。

$$40 = 6 \cdot 6 + 4$$

であるから，小数第40位の数字は285714の4番目の数字で**7**である。

2

(1)　384を素因数分解すると

$$384 = 2^7 \cdot 3$$

であるから

$$\sqrt{\frac{384}{n}} = \sqrt{\frac{2^7 \cdot 3}{n}} = 2^3 \times \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{n}} \quad \cdots\cdots①$$

①が自然数となる最小の自然数nは

$$n = 2 \cdot 3 = \mathbf{6}$$

(2)　$3x+1$は12の約数であり，かつ，3で割った余りが1であるから

$$3x+1 = -2,\ 1,\ 4$$

よって

$$x = -1,\ 0,\ 1$$

したがって，題意を満たすxは全部で**3**個ある。

(3)　$80 = 2^4 \times 5$

$$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$$

よって，nは3×5^2を因数に必ずもち，さらに，2^0または2^1または2^2または2^3または2^4をもっていればよい。よって，求めるnの個数は全部で**5**個ある。

(4)　m，nは整数k，lを用いて

$$m = 6k + 1,\quad n = 6l + 5$$

と表される。このとき

$$\begin{aligned} 3m^2 + 2n &= 3(6k+1)^2 + 2(6l+5) \\ &= 3(6^2k^2 + 2\cdot 6k + 1) + 2\cdot 6l + 2\cdot 5 \\ &= 6(18k^2 + 6k + 2l + 2) + 1 \end{aligned}$$

よって，$3m^2 + 2n$を6で割ったときの余りは**1**である。

(5)　1から150までの自然数のうち

5の倍数は　$150 \div 5 = 30$（個）

$25\,(=5^2)$の倍数は　$150 \div 25 = 6$（個）

$125\,(=5^3)$の倍数は　125の1個

2の倍数は，これらよりも多い。

したがって，$150!$の末尾には0が連続して

$30 + 6 + 1 =$ **37**（個）

だけ並ぶ。

(6)　$x = 0.\dot{1}2\dot{3}$　とおく。$1000x - x$は次のようになる。

$$\begin{array}{rrl} & 1000x = & 123.123123\cdots \\ -) & x = & 0.123123\cdots \\ \hline & 999x = & 123 \end{array}$$

よって

$$x = \frac{123}{999} = \mathbf{\frac{41}{333}}$$

数学